Модифицированное квазиэйкональное приближение для реджевского подхода

Вечернин В.В.

1 Цель модификации

При использовании стандартного квазиэйкональное приближения [2] в рамках реджевского подхода возникают трудности при описании роста отношения σ^{el}/σ^{tot} для pp рассеяния в области сверхвысоких энергий [3]. Данные эксперимента TOTEM [1] показывают, что при $\sqrt{s} > 2.76$ значение σ^{el}/σ^{tot} превышает 1/4 и при энергии $\sqrt{s} = 13$ ТэВ достигает значения 0.28. В рамках стандартного квазиэйконального приближения описание этого эффекта требует использование значения квазиэконального параметра $C < 1$ (см. [4], где из фитирования эксперимента получено значение $C = 0.8$), что вступает в противоречие с соотношением

$$C = 1 + \frac{\sigma^{dif}}{\sigma^{el}} \ . \tag{1}$$

Соотношение (1) возникает следующим образом (см. детали ниже в разделе 6). Знание упругой амплитуды $T(s,t)$ позволяет рассчитать σ^{tot}, через $2\,\mathrm{Im}\,T(s,t=0)$:

$$\sigma^{tot} = \frac{2}{J}\,\mathrm{Im}\,T(s,t=0) \approx \frac{1}{s}\,\mathrm{Im}\,T(s,t=0) \ . \tag{2}$$

Использование правил АГК позволяет разбить это полное сечение на сумму вкладов с заданным числом (m) разрезанных померонов. При этом вклад в σ^{tot}, возникающий от диаграмм без разрезания померонов ($m=0$), интерпретируется как сумма упругого и дифракционного сечений ($\sigma_0 = \sigma^{el} + \sigma^{dif}$). Кроме того отдельно можно рассчитать полное упругое сечение:

$$\sigma^{el} = \int \frac{d\sigma^{el}}{dt}dt = \int \frac{|T(s,t)|^2}{16\pi s^2}dt \ . \tag{3}$$

В результате, в рамках стандартного квазиэйконального приближения в реджевском подходе, приходим к соотношению (1), которое не допускает значений $C < 1$.

Чтобы подчеркнуть драматизм ситуации, отметим, что недифракционное сечение σ^{ND} (сумма вклада диаграмм с хотя бы одним разрезанным помероном),

$$\sigma^{ND} \equiv \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_m \ , \tag{4}$$

плюс упругое σ^{el} в результате этих вычислений при $C < 1$ оказывается больше полного сечения σ^{tot}:

$$\sigma^{ND} + \sigma^{el} = \sigma^{tot} + (1 - C)\sigma^{el} > \sigma^{tot} \ . \tag{5}$$

Ниже предлагается идея разрешения этого противоречия, путем введения зависимости дифракционного параметра C от $t = -\mathbf{k}_\perp^2$.

2 Общая схема вычислений

Чтобы не выписывать все формулы с самого начала, возмем за основу обзор K.Werner. Ниже везде ссылки на формулы из этого обзора. Изложение квазиэйконального приближения в реджевском подходе, начинается с формулы (6.30). Автор использует амплитуду упругого pp-рассеяния попеременно в двух нормировках, которые отличаются только тривиальным общим множителем:

$$T(s,t) = 4\pi J \cdot A(s,t) \ , \qquad J \equiv 4\sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2} = 2\sqrt{s(s - 4m^2)} \approx 2s \ . \tag{6}$$

Вместо предположения (6.31) используем аналогичное предположение:

$$N_n(k_1, k_2, ..., k_n) = C_n((k_1 + ... + k_n)^2) \prod_{i=1}^{n} N(k_i^2) \ , \tag{7}$$

содержащее вместо C_n

$$C_n \to C_n((k_1 + ... + k_n)^2) = C_n(t) \ , \tag{8}$$

где $t = -k^2 = -(k_1 + ... + k_n)^2$. В формулах (6.32)-(6.35) просто заменяем $C_n \to C_n(t)$.

Формулы (6.36)-(6.39) теперь другие: Вместо (6.38) имеем:

$$C_n(t) = C^{n-1}(t) = [C(t)]^{n-1} \ . \tag{9}$$

Это модифицированный эйконал, все постулаты реджистики при этом остаются теми же самыми (!). Более того, как и в исходном эйконале, по-прежнему можно явно провести суммирование амплутуд с обменом разным числом померонов, т.е. по n. Действительно, с учетом (9) теперь из (6.35) мы имеем:

$$A_n(s,t) = \frac{1}{4\pi \mathrm{i} C(t)} \int d^2b \exp(\mathrm{i}\mathbf{k} \cdot \mathbf{b}) \frac{[-C(t)\omega(s,b)]^n}{n!} \ , \tag{10}$$

где $t = -\mathbf{k}^2$. Суммирование по n дает вместо (6.36):

$$A(s,t) = \frac{\mathrm{i}}{4\pi}\int d^2b\,\exp(\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{b})\gamma_t(s,b)\ , \tag{11}$$

где вместо (6.39) с $\gamma(s,b)$ мы теперь имеем:

$$\gamma_t(s,b) \equiv \frac{1}{C(t)}\{1-\exp[-C(t)\omega(s,b)]\}\ . \tag{12}$$

Важно, что $\omega(s,b)$ здесь тоже самое, что в работе K.Werner, т.е. дается формулой (6.34) и далее формулами (6.42) и (6.43).

Однако, нужно осознавать, что $\gamma_t(s,b)$ больше НЕ ЯВЛЯЕТСЯ простым фурье преобразованием $A(s,t)$, поскольку есть дополнительная зависимость от

$$t = -\mathbf{k}^2 = -\mathbf{k}_\perp^2\ . \tag{13}$$

Они связаны более сложным соотношением (11). (Отметим опечатку в тексте между формулами (6.39) и (6.40): должно быть $d\sigma^{el}/dt = |T(s,t)|^2/16\pi s^2$.)

3 Простота, предлагаемой модификации

Относительная простота, предлагаемой модификации квазиэйконального приближения, состоит в том, что доказательство правил АГК в следующем разделе 6.3 в обзоре K.Werner проводится для амплитуды $A(s,t)$ при фиксированномзначении $t = -\mathbf{k}^2$ и введенная зависимость $C = C(t)$ не влияет на справедливость этих доказательств.

Поэтому сохраняется и справедливость разложения полного сечения на вклады с данным числом разрезанных померонов:

$$\sigma^{tot} = \sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2 + ... = \sigma_0 + \sigma^{ND}\ , \tag{14}$$

полученная на основе правил АГК в следующем разделе 6.4 этого обзора. Поскольку согласно (6.59) вычисления в этом разделе проводятся (вплоть до формулы (6.80) включительно) при $t = 0$, то во всех полученных здесь результатах надо считать $C = C(t = 0)$, в том числе и в результитующих формулах (6.76) и (6.78), в которые входит z, даваемое формулой (6.65) с $C = C(t = 0)$.

Однако, формулы (6.81) и (6.82) для полного упругого сечения более не справедливы (см. следующий параграф), и как следствие не верна формула (6.83), ведущая к (1).

4 Вычисление полного упругого сечения

Как мы уже упоминали выше, формула (11) для амплитуды теперь НЕ ЯВЛЯЕТСЯ простым фурье преобразованием $\gamma_t(s,b)$. Тем не менее мы можем на ее основе вычислить полное упругое сечение. Учитывая нормировки, имеем:

$$\sigma^{el} = \int \frac{d\sigma^{el}}{dt} dt = \int \frac{|T(s,t)|^2}{16\pi s^2} dt = 4\pi(1 - \frac{4m^2}{s}) \int |A(s,t)|^2 dt \approx 4\pi \int |A(s,t)|^2 dt = \tag{15}$$

$$= 4 \int |A(s,t)|^2 d^2k \ ,$$

где мы приняли во внимание, что $t = -\mathbf{k}^2$. Подставляя теперь (11) в (15), находим:

$$\sigma^{el} = \frac{1}{4\pi^2} \int d^2b \, d^2b' \exp[\mathrm{i}\mathbf{k} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{b}')] \, \gamma_t(s,b) \, \gamma_t(s,b') \, d^2k \ . \tag{16}$$

В формуле (16) можно выполнить интегрирование по углам, используя формулу (6.18) для функции Бесселя:

$$J_0(z) = 2\pi \int_0^{2\pi} d\phi \exp(\mathrm{i}z \cos\phi) \ , \tag{17}$$

которая позволяет представить амплитуду (11) в виде однократного интеграла:

$$A(s,t) = \frac{\mathrm{i}}{2} \int_0^{\infty} J_0(kb) \, \gamma_t(s,b) \, b \, db \ . \tag{18}$$

Используя ее, находим

$$\sigma^{el} = 2\pi \int_0^{\infty} b \, db \, b' \, db' \, k \, dk \, J_0(kb) \, J_0(kb') \, \gamma_t(s,b) \, \gamma_t^*(s,b') \ , \tag{19}$$

где согласно (12)

$$\gamma_t(s,b) \equiv \frac{1}{C(t)} \{1 - \exp[-C(t)\omega(s,b)]\} \tag{20}$$

и $t = -k^2$. Напомним, что $\omega(s,b)$ здесь тоже самое, что в работе K.Werner, т.е. дается формулой (6.34) и далее формулами (6.42) и (6.43).

Для численных расчетов, наверное, проще использовать непосредственно (15):

$$\sigma^{el} = \int_0^{-\infty} \frac{d\sigma^{el}}{dt} dt \tag{21}$$

где

$$\frac{d\sigma^{el}}{dt} = \frac{|T(s,t)|^2}{16\pi s^2} = 4\pi |A(s,t)|^2 = \pi \left| \int_0^{\infty} J_0(\sqrt{-t}\, b) \, \gamma_t(s,b) \, b \, db \right|^2 \ . \tag{22}$$

В таком представлении интегрирование для нахождения σ^{el} становится фактически 2-кратным.

Используя (22), можно вычислить и наклон дифракционного конуса для сравнения с экспериментальными данными:

$$B = \frac{d}{dt} \ln \frac{d\sigma^{el}}{dt} \bigg|_{t=0} \tag{23}$$

Надежда на решение проблемы, сформулированной в параграфе 1, заключается в том, что теперь

$$\sigma^{tot} = \sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2 + ... = \sigma_0 + \sigma^{ND} \ , \tag{24}$$

вычисляются по старым формулам (6.76) и (6.78), в которые входит z, (6.65), с $C = C(t=0)$, а σ^{el} вычисляется по новой формуле (19), в которую дают вклад все значения $C(t)$. При этом для $C(t) = const$ должны воспроизводиться старые результаты.

Очень поверхностные оценки дают:

$$\sigma^{tot} \sim \frac{1}{C(0)} \ , \qquad \sigma^{el} \sim \frac{1}{C^2(t)} \ , \qquad \frac{\sigma^{el}}{\sigma^{tot}} \sim \frac{C(0)}{C^2(t)} \ , \tag{25}$$

Поэтому для увеличения этого отношения, по сравнению со случаем обычного квази-эйконала, нужно, чтобы

$$C(t) < C(0) \ , \tag{26}$$

Например, при энергиях LHC $C(0) \simeq 1.5$ и $C(t) \simeq 0.8$ при $-t \simeq 1/B$, где B - наклон дифракционного конуса. Не обязательно его точно сюда подставлять, можно просто ввести новый размерный параметр $R_C^2 \simeq B$ такого порядка (20 ГэВ$^{-2}$). Например:

$$C(t) = C_0 + C_1 \exp(t\, R_C^2) = 0.8 + 0.7 \exp(t\, 20) \ . \tag{27}$$

5 Анализ в рамках традиционного квазиэйконала I (без использования соотношений АГК)

Вернемся на время к обычному квазиэйконалу, $C(t) = C = const$. Кроме амплитуд в нормировках (22) часто используется амплитуда $a(\mathbf{k})$ ($t = -\mathbf{k}^2$, ее зависимость от s подразумевается) немного в другой нормировке:

$$a(\mathbf{k}) \equiv 4\pi\, A(s,t) = T(s,t)/J \ . \tag{28}$$

Ее двумерный Фурье образ удобно определить так

$$a(\mathbf{b}) \equiv \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\, a(\mathbf{k})\, \exp(-\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{b}) \ . \tag{29}$$

В этом случае обратное преобразование имеет вид:

$$a(\mathbf{k}) \equiv \int d^2\mathbf{b}\, a(\mathbf{b})\, \exp(\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{b}) \ . \tag{30}$$

Использование $a(\mathbf{b})$ позволяет записать условие унитарности амплитуды при высоких энегиях наиболее простым образом. В этом случае оно сводится к тому, что для *любого значения прицельного параметра* b должно выпонятся соотношение:

$$2\,\mathrm{Im}\, a(b) \geq |a(b)|^2 \tag{31}$$

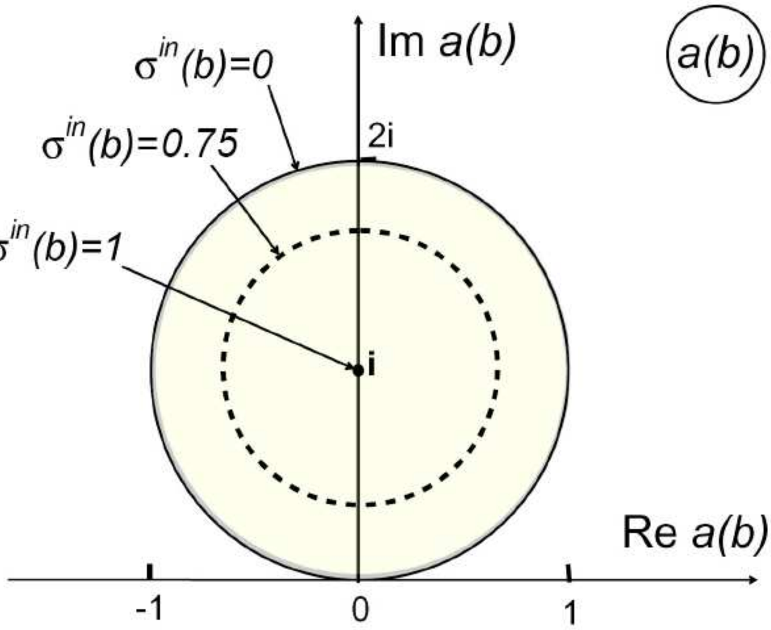

Рис. 1: Ограничения, налагаемые на амплитуду $a(b)$ условием унитарности (31).

($b = p \cdot l$ при высоких энегиях является заменой углового момента l). Геометрически, условие унитарности (31) означает, что амплитуда $a(\mathbf{b})$ должна лежать в комплексной плоскости в круге радиуса 1 с центром в точке i (см. Рис.1).

Отметим, что при этом чисто мнимая амплитуда $a(b)$ может принимать значения от 0 до 2i:

$$a(b) = \mathrm{i}\gamma(b) \ , \qquad 0 \leq \gamma(b) \leq 2 \ . \tag{32}$$

Интегрируя (31) по $\mathbf{b}$ приходим к оптической теореме:

$$\sigma^{tot} = \int d^2b\, \sigma^{tot}(b) \equiv \int d^2b\, 2\,\mathrm{Im}\, a(b) \geq \int d^2b\, |a(b)|^2 \equiv \int d^2b\, \sigma^{el}(b) = \sigma^{el} \tag{33}$$

Видно, что амплитуда на границе упомянутого выше круга отвечает чисто упругому рассеянию $\sigma^{tot}(b) = \sigma^{el}(b)$, $\sigma^{in}(b) = 0$. Максимальная неупругость достигается в центре круга при $a(b) = \mathrm{i}$. В этом случае: $\sigma^{in}(b) = \sigma^{el}(b)$ и $\sigma^{tot}(b) = 2\sigma^{el}(b)$. Приведем также области изменения $\sigma^{tot}(b)$, $\sigma^{el}(b)$ и $\sigma^{in}(b)$:

$$0 \leq \sigma^{tot}(b) \leq 4 \ , \qquad 0 \leq \sigma^{el}(b) \leq 4 \ , \qquad 0 \leq \sigma^{in}(b) \leq 1(!) \tag{34}$$

Последнее неравенство позволяет интерпретировать

$$\sigma^{in}(b) \equiv \sigma^{tot}(b) - \sigma^{el}(b) = 2\,\mathrm{Im}\, a(b) - |a(b)|^2 \ , \tag{35}$$

как вероятность неупругого взаимодействия при данном значении прицельного параметра b.

Про рассеяние с амплитудой

$$a(b) = \mathrm{i} \;\; \text{при} \;\; b \le R \;\; \text{и} \;\; a(b) = 0 \;\; \text{при} \;\; b > R \; , \tag{36}$$

для которого $\sigma^{in}(b) = 1$ при $b \le R$, говорят как о рассеянии на "черном" диске радиуса R. (Отметим, что при этом $\sigma^{tot}(b) = 2$ и $\sigma^{el}(b) = 1$ не имеют упомянутой выше вероятностной интерпретации в силу (34).) Важно также помнить, что рассеянию на "сером" диске с $\sigma^{in}(b)$ равному, например, 0.75, соответствует два значения чисто мнимой амплитуды $a(b) = 0.5\,\mathrm{i}$ и $a(b) = 1.5\,\mathrm{i}$ (см. Рис.1).

Ниже, чтобы найти ограничения, накладываемые требованием унитарности, мы вычислим $a(b)$, σ^{tot}, σ^{el} и B для чисто мнимой реджевской амплитуды, даваемой формулой (6.67). Эту формулу можно записать так ($t = -\mathbf{k}^2$):

$$A(s,t) = \mathrm{i}\, N_0\, e^{y\Delta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-z/2)^{n-1}}{n \cdot n!} \exp(-\mathbf{k}^2\, r^2/n) \; . \tag{37}$$

Здесь согласно (6.65)

$$z = \frac{2N_0 C}{r^2}\, e^{y\Delta} = \frac{2N_0 C}{r^2} \left(\frac{s}{s_0}\right)^{\Delta} \; , \tag{38}$$

где мы ввели дополнительное обозначение

$$r^2 \equiv R^2 + \alpha' y \; , \qquad y = \ln(s/s_0) \; . \tag{39}$$

Используя (28) и (29), имеем:

$$a(\mathbf{b}) = \frac{1}{\pi} \int d^2\mathbf{k}\, A(s,t)\, \exp(-\mathrm{i}\mathbf{k} \cdot \mathbf{b}) = \tag{40}$$

$$= \mathrm{i} \frac{N_0}{\pi} e^{y\Delta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-z/2)^{n-1}}{n \cdot n!} \int d^2\mathbf{k}\, \exp(-\mathbf{k}^2\, r^2/n - \mathrm{i}\mathbf{k} \cdot \mathbf{b})$$

Гауссов интеграл легко вычисляется:

$$\int d^2\mathbf{k}\, \exp(-\mathbf{k}^2\, r^2/n - \mathrm{i}\mathbf{k} \cdot \mathbf{b}) = \frac{\pi\, n}{r^2} \exp(-\frac{nb^2}{4r^2}) \; . \tag{41}$$

Подставляя это в (40), а также умножая и деля на $-z/2$, находим:

$$a(b) = -\frac{\mathrm{i}}{C} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-z/2)^n}{n!} e^{-\frac{nb^2}{4r^2}} \; , \tag{42}$$

что окончательно дает:

$$a(b) = \frac{\mathrm{i}}{C} \left[1 - \exp\left(-\frac{z}{2} e^{-\frac{b^2}{4r^2}}\right)\right] = \frac{\mathrm{i}}{C} \left[1 - e^{-X}\right] \; , \tag{43}$$

где мы ввели обозначение

$$X \equiv \frac{z}{2}\, e^{-\frac{b^2}{4r^2}} \; . \tag{44}$$

Из (43) видим, что если $C \geq 0.5$, то условие унитарности амплитуды (32), выполнено, так как $X > 0$ при любых значениях b.

Формула (43) позволяет легко вычислить полное и упругое сечения. Действительно, имеем:

$$\sigma^{tot}(b) = \frac{2}{C}\left[1 - e^{-X}\right] \ , \tag{45}$$

$$\sigma^{el}(b) = \frac{1}{C^2}\left[1 - e^{-X}\right]^2 = \frac{1}{C^2}\left[2(1 - e^{-X}) - (1 - e^{-2X})\right] \ . \tag{46}$$

Интегрируя (45), имеем

$$\sigma^{tot} = \int d^2b\, \sigma^{tot}(b) = \frac{2\pi}{C}\int_0^\infty db^2 \left[1 - \exp\left(-\frac{z}{2}e^{-\frac{b^2}{4r^2}}\right)\right] \ . \tag{47}$$

Вводя вместо b^2 новую переменную интегрирования:

$$x = -\frac{z}{2}e^{-\frac{b^2}{4r^2}} \ , \qquad dx = -x\frac{db^2}{4r^2} \ , \tag{48}$$

находим

$$\sigma^{tot} = \frac{2}{C}(4\pi r^2)\int_0^{z/2}\frac{dx}{x}\left(1 - e^{-x}\right) = \frac{2}{C}(4\pi r^2)\Phi_1(z/2) \ , \tag{49}$$

где мы использовали обозначение:

$$\Phi_m(z) \equiv \int_0^z \frac{dx}{x^m}\left(1 - e^{-x}\right) = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}z^n}{n!\, n^m} \ . \tag{50}$$

Отметим, что в обзоре Werner вместо $\Phi_1(z)$ используется функция $f(z)$ (6.79), связанная с ней очевидным образом:

$$f(z) = \frac{1}{z}\Phi_1(z) = \frac{1}{z}\int_0^z \frac{dx}{x}\left(1 - e^{-x}\right) = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-z)^{n-1}}{n!\, n} \ . \tag{51}$$

Мы, однако, будем использовать функцию $\Phi_1(z)$, поскольку для нее при больших значениях z существует простое представление:

$$\Phi_1(z) = \ln z + \gamma_E + E_1(z) \ , \tag{52}$$

где $\gamma_E = 0,5772$ - постоянная Эйлера, а

$$E_1(z) \equiv \int_z^\infty e^{-x}\frac{dx}{x} < \frac{1}{z}\, e^{-z} \ . \tag{53}$$

Интегрируя теперь по b (46) имеем:

$$\sigma^{el} = \int d^2b\, \sigma^{el}(b) = \frac{\pi}{C^2}\left[2\int_0^\infty db^2\left(1 - e^{-X}\right) - \int_0^\infty db^2\left(1 - e^{-2X}\right)\right] \ . \tag{54}$$

Действуя далее как для σ^{tot} находим:

$$\sigma^{el} = \frac{1}{C^2}(4\pi r^2)[2\,\Phi_1(z/2) - \Phi_1(z)] \ , \tag{55}$$

что совпадает с (6.82) при учете (6.78) и (51).

Учитывая определение (22) для дифференциального сечения упругого рассеяния:

$$\frac{d\sigma^{el}}{dt} = 4\pi|A(s,t)|^2$$

и явный вид $A(s,t)$, даваемый формулой (37), можно по формуле (23) найти наклон дифракционного конуса. Дифференцирование дает:

$$B = 2r^2\frac{\Phi_2(z/2)}{\Phi_1(z/2)} \ , \tag{56}$$

где $\Phi_1(z/2)$ и $\Phi_2(z/2)$ даются формулами (50).

Используя (49) и (55), можно также вычислить отношение σ^{el}/σ^{tot}:

$$\frac{\sigma^{el}}{\sigma^{tot}} = \frac{1}{C}\left[1 - \frac{\Phi_1(z)}{2\Phi_1(z/2)}\right] \ . \tag{57}$$

Подставляя сюда (52) получаем:

$$\frac{\sigma^{el}}{\sigma^{tot}} = \frac{1}{2C}\left[1 - \frac{\ln 2 + E_1(z) - E_1(z/2)}{\ln z - \ln 2 + \gamma_E + E_1(z/2)}\right] \ . \tag{58}$$

Формулы (56), (57) и (58) - точные. Они получены без использования соотношений АГК. Их обязательно следует использовать при фиксации реджевских параметров, т.к. экспериментально отношение σ^{el}/σ^{tot} определено с большой точностью. На соотношение (57) можно смотреть, как на уравнение для фиксации значения C. Конечно, в него зависимость от C входит еще и в неявном виде через z (38), но она слабая и уравнение (57) легко решается иттерациями относительно C, при других фиксированных параметрах.

Из (38) следует, что z растет с ростом s, т.к. $(s/s_0)^\Delta$ при $\Delta > 0$ растет быстрее, чем r^2, который согласно (39) растет только как $\ln(s/s_0)$. Если считать, что в области энергий БАК $z \gg 1$, то в этой области все E_1 в силу (53) можно отбросить, и мы приближенно имеем:

$$\frac{\sigma^{el}}{\sigma^{tot}} \approx \frac{1}{2C}\left[1 - \frac{\ln 2}{\ln z - \ln 2 + \gamma_E}\right] = \frac{1}{2C}\left[1 - \frac{0.693}{\ln z - 0.116}\right] \ . \tag{59}$$

В принципе эта формула предсказывает правильное поведение σ^{el}/σ^{tot} с энергией - его рост до значения $\frac{1}{2C}$, когда $z \to \infty$ при $s \to \infty$.

Однако, при реальных энергиях z не столь велико. Поэтому проведем еще оценки, используя точных значения спецфункций $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$, которые в пакете Mathematica выглядят так:

$$\Phi_1(z) = \text{ Log[z]+EulerGamma+Gamma[0,z] ;}$$
$$\Phi_2(z) = \text{ z HypergeometricPFQ[\{1,1,1\},\{2,2,2\},-z] ;}$$

Найдем сначала значение σ^{el}/σ^{tot}, а заодно и B (в Гэв$^{-2}$) для набора значений параметров из работы [2], используемой в мультепомеронной модели:

$$\Delta = 0.139, \quad \alpha' = 0.21\ GeV^{-2}, \quad N_0 = \gamma_{pp} = 1.77\ GeV^{-2}, \quad R^2_{pp} = 3.18\ GeV^{-2}, \quad C = 1.5\ . \tag{60}$$

Для $\sqrt{s}$ = (60, 200, 540, 900, 1800, 2760, 5500, 7000, 8000, 13000, 14000, 50000)
мы имеем z = (3.38, 4.29, 5.24, 5.83, 6.74, 7.38, 8.56, 9.02, 9.29, 10.3, 10.5, 13.9)
σ^{el}/σ^{tot} = (0.156, 0.175, 0.19, 0.197, 0.207, 0.212, 0.22, 0.223, 0.224, 0.229, 0.23, 0.242)
B (Гэв$^{-2}$) = (11.7, 13.4, 14.9, 15.8, 17.1, 17.9, 19.3, 19.8, 20.1, 21.2, 21.4, 24.5)

Для сравнения приведем также экспериментальные значения [1]:
σ^{el}/σ^{tot} (эксп.) = (0.177, 0.194, 0.211, 0.221, 0.234, 0.257, 0.253, 0.256, 0.267, 0.280, - , -)
B (Гэв$^{-2}$) (эксп.) = (12.5, - , 15.5, - , 16.5, 17.1, - , 19.8, 19.9, 20.4, - , -)

Видим, что достичь экспериментального значения σ^{el}/σ^{tot}=0.25 при $\sqrt{s}$=2760 не получается. Кроме того, как мы знаем, при использовании этого набора параметров для получения нужного роста множественности с энергией, необходимо увеличивать плотность числа частиц, излучаемых одиночной струной.

Проведем эти же вычисления для набора значений параметров с увеличенной Δ, используемого в работе E.Ferreiro [3], которая правильно описывает рост множественности при энергиях БАК:

$$\Delta = 0.19, \quad \alpha' = 0.25\ GeV^{-2}, \quad N_0 = \gamma_{pp} = 0.85\ GeV^{-2}, \quad R^2_{pp} = 3.3\ GeV^{-2}, \quad C = 1.8\ . \tag{61}$$

Для $\sqrt{s}$ = (60, 200, 540, 900, 1800, 2760, 5500, 7000, 8000, 13000, 14000, 50000)
мы имеем z = (2.71, 3.85, 5.19, 6.06, 7.49, 8.56, 10.6, 11.5, 11.9, 13.9, 14.3, 21.4)
σ^{el}/σ^{tot} = (0.115, 0.139, 0.157, 0.166, 0.177, 0.183, 0.192, 0.195, 0.196, 0.201, 0.202, 0.212)
B (Гэв$^{-2}$) = (12.4, 14.5, 16.5, 17.7, 19.4, 20.6, 22.6, 23.4, 23.8, 25.5, 25.7, 30.5)

Получаются еще меньшие значения σ^{el}/σ^{tot}, противоречащие эксперименту. Это, конечно, из-за выбора слишком большого значения $C = 1.8$, мотивированного растущим с энергией вкладом дифракционных процессов. Значения B получаются наоборот слишком большие.

Для набора параметров, использованного в нашей работе [6],

$$\Delta = 0.2, \quad \alpha' = 0.05\ GeV^{-2}, \quad N_0 = \gamma_{pp} = 1.035\ GeV^{-2}, \quad R^2_{pp} = 3.3\ GeV^{-2}, \quad C = 1.5\ , \tag{62}$$

для $\sqrt{s}$ = (60, 200, 540, 900, 1800, 2760, 5500, 7000, 8000, 13000, 14000, 50000)
мы имеем z = (4.31, 6.75, 9.79, 11.9, 15.4, 18., 23.4, 25.6, 26.9, 32.3, 33.2, 53.7)
σ^{el}/σ^{tot} = (0.175, 0.207, 0.227, 0.235, 0.245, 0.25, 0.257, 0.259, 0.261, 0.265, 0.265, 0.274)
B (Гэв$^{-2}$) = (9.19, 10.3, 11.5, 12.2, 13.1, 13.8, 14.9, 15.3, 15.5, 16.3, 16.5, 18.8).

Видим, что значение σ^{el}/σ^{tot}=0.25 преодолевается как и надо при $\sqrt{s} = 2760$ ТэВ, но значение 0.28 при $\sqrt{s} = 13\,000$ ТэВ немного не достигается. При этом для наклона дифракционного конуса B, из-за $\alpha' = 0.05\ GeV^{-2}$, получаются слишком маленькие значения.

Попробуем это исправить и улучшить набор параметров, использованный в нашей работе [6]. Если с учетом накопленного опыта выбрать:

$$\Delta = 0.19, \quad \alpha' = 0.07\ GeV^{-2}, \quad N_0 = \gamma_{pp} = 1.25\ GeV^{-2}, \quad R^2_{pp} = 3.8\ GeV^{-2}, \quad C = 1.4\ , \tag{63}$$

то для $\sqrt{s}$ = (60, 200, 540, 900, 1800, 2760, 5500, 7000, 8000, 13000, 14000, 50000)
мы имеем z = (3.79, 5.77, 8.17, 9.77, 12.5, 14.5, 18.4, 20.1, 21., 25., 25.6, 40.2)
σ^{el} = (6.95, 11.1, 15.3, 17.6, 20.9, 23., 26.5, 27.8, 28.5, 31., 31.4, 38.5)
σ^{tot} = (39.2, 52.8, 65.5, 72.4, 82.1, 88.3, 98.6, 102., 104., 112., 113., 134.)
σ^{el}/σ^{tot} = (0.177, 0.21, 0.233, 0.243, 0.254, 0.26, 0.269, 0.271, 0.273, 0.277, 0.278, 0.288)
B (Гэв$^{-2}$) = (10.6, 11.9, 13.1, 13.9, 15., 15.7, 17., 17.4, 17.7, 18.6, 18.8, 21.5).

Для сравнения используем также более полный набор экспериментальных значений [1, **?**]:
σ^{el} (эксп.) = (7.7, 10., 13., 15., 18., 21.8, 24., 25.1, 27.1, 30.7[31.0], - , -)
σ^{tot} (эксп.) = (43.6, 51.5, 61.5, 68., 77., 84.7, 95., 98., 101.7, 109.5[110.6], - , -)
σ^{el}/σ^{tot}(эксп.)=(0.177, 0.194, 0.211, 0.221, 0.234, 0.257, 0.253, 0.256, 0.267, 0.280[0.280],-,-)
B (Гэв$^{-2}$) (эксп.) = (12.5, - , 15.5, - , 16.5, 17.1, - , 19.8, 19.9, 20.4, - , -)

Видим, что значения σ^{el}, σ^{tot} и σ^{el}/σ^{tot} довольно хорошо описываются в широком диапазоне энергий. Что касается наклона дифракционного конуса B, то он хотя и растет с энергией, но его численные значения оказываются все же несколько меньше экспериментальных значений.

В заключение этого раздела подчеркнем, что без использования соотношений АГК условие унитарности амплитуды pp-рассеяния (31), как это видно из (43), приводит лишь к требованию на параметр $C > 0.5$. Т.е. с точки значения условия унитарности (31) значения $0.5 < C < 1$ являются вполне допустимыми. Отметим, что значения $C < 1$, как это видно из (43), позволяют описать широко обсуждаемый [**?**] т.н. эффект "галло" - уменьшение сечения неупругого рассеяния $\sigma^{in}(b)$ при $b = 0$, по сравнению с его максимумом $\sigma^{in}(b) = 1$, который достигается при некотором ненулевом значении b, который также упоминается в экспериментальной работе [1].

К сожалению, как мы увидим в следующем разделе, использование соотношений

АГК приводит к результатам, которые являются самосогласованными только для значений $C \geq 1$. Использование таких $C \geq 1$ не приводит к появлению эффекта "галло" в рамках стандартного реджевского подхода, т.к. из (43) при $C \geq 1$ следует, что максимум $\sigma^{in}(b)$, определяемом формулой (35), всегда оказывается при $b = 0$.

6 Анализ в рамках традиционного квазиэйконала II (с использованием соотношений АГК)

Вывод соотношений АГК, вообще говоря, строго доказан лишь для случая асимптотически больших начальных энергий, когда $s \to \infty$. Поэтому их использование при каком-то фиксированном значении s может оказаться необоснованным (см. недавний доклад K.Werner [**?**]).

Если все же верить в их справедливость при фиксированном значении s, то они позволяют представить полное сечение как сумму вкладов с различным числом m разрезанных померонов и *любым (!)* числом неразрезанных померонов:

$$\sigma^{tot} = \sum_{m=0}^{\infty} \sigma_m = \sigma_0 + \sigma^{ND} \ , \tag{64}$$

где по определению к недифракционным процессам относятся все вклады с хотя бы одним разрезанным помероном:

$$\sigma^{ND} = \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_m \ . \tag{65}$$

Считается, что все упругие и дифракционные процессы входят в σ_0:

$$\sigma_0 = \sigma^{el} + \sigma^{dif} \ . \tag{66}$$

В стандартном квазиэйкональном подходе в приближении чисто мнимой амплитуды с использованием правил АГК можно вывести следующие соотношения (6.76) для $m \geq 1$:

$$\sigma_m = \frac{8\pi N_0}{mz} e^{y\Delta} \left(1 - e^{-z} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{z^k}{k!} \right) \ . \tag{67}$$

Для $m = 0$ вычисления дают (6.77):

$$\sigma_0 = 8\pi N_0 e^{y\Delta} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - 2^{k-1}}{k!k} (-z/2)^{k-1} \ . \tag{68}$$

Используя, введеную выше функцию $\Phi_1(z)$ (50)-(52), выражение для σ_0 можно записать следующим образом:

$$\sigma_0 = \frac{4\pi r^2}{C} [2\Phi_1(z/2) - \Phi_1(z)] \ . \tag{69}$$

Можно также, используя (67), найти выражение для σ^{ND}, вычислив сумму в выражении (65):

$$I(z) \equiv \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(1 - e^{-z} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{z^k}{k!} \right) \ . \tag{70}$$

Можно показать, что $I(z) = \Phi_1(z)$, которая была введена выше (50):

$$\Phi_1(z) \equiv \int_0^z \frac{dx}{x} \left(1 - e^{-x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n!\, n} \ , \tag{71}$$

что требует некоторых математических усилий. Проще всего это можно сделать, доказав, что $I(z)$ и $\Phi_1(z)$ удовлетворяют одинаковому дифференциальному уравнению:

$$z\, I'(z) = 1 - e^{-z} \ , \qquad z\, \Phi_1'(z) = 1 - e^{-z}$$

с одинаковыми начальными условиями $I(0) = \Phi_1(0) = 0$. После этого сразу находим:

$$\sigma^{ND} = \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_m = \frac{4\pi r^2}{C} \Phi_1(z) \ . \tag{72}$$

Для проверки сложим (69) и (72), Видим, что действительно получается найденное выше (*без использования правил АГК!*) выражение (49) для полного сечения:

$$\sigma_0 + \sigma^{ND} = \frac{4\pi r^2}{C}[2\Phi_1(z/2) - \Phi_1(z)] + \frac{4\pi r^2}{C}\Phi_1(z) = \frac{4\pi r^2}{C}[2\Phi_1(z/2) = \sigma^{tot} \ . \tag{73}$$

Сравнивая, полученную формулу (69) для σ_0 с полученной выше (*тоже без использования правил АГК!* формулой (55) для упругого сечения, видим, что

$$\sigma_0 = C\sigma^{el} \ , \tag{74}$$

Но выше (66) мы предполагали, что σ_0 включает в себя все упругие и дифракционные процессы:

$$\sigma_0 = \sigma^{el} + \sigma^{dif} \ .$$

Приравнивая, находим

$$C = 1 + \frac{\sigma^{dif}}{\sigma^{el}} \ , \tag{75}$$

что требует, чтобы $C \geq 1$, хотя, как мы видели выше условие унитарности (31) для амплитуды упругого pp рассеяния (43) выполняется при $C \geq 1/2$.

Условие (75) можно переписать и так

$$\sigma_0 = \sigma^{tot} - \sigma^{ND} \geq \sigma^{el} \ , \tag{76}$$

или

$$\sigma^{ND} + \sigma^{el} \leq \sigma^{tot} \ , \tag{77}$$

которое в рамках стандартного квазиэйконального приближения к реджевскому подходу выполняется только при $C \geq 1$.

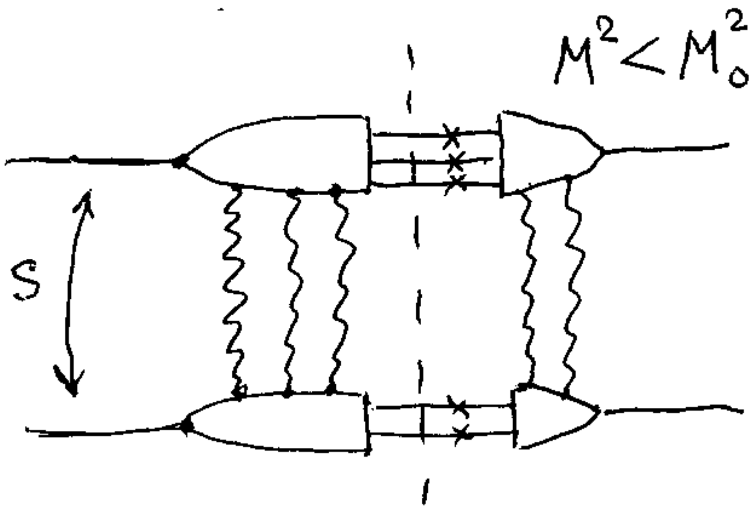

Рис. 2: Вклад промежуточных состояний с инвариантной массой M меньшей какого-то фиксированного значения, не зависящего от начальной энергии s, $M^2 \leq M_0^2$, дающий вклад в σ^{dif}. Возникает при разрезании амплитуды pp рассеяния между померонами.

7 Вклад дифракционных процессов с большими массами $M^2 \sim s$. Усиленные реджевские диаграммы.

Отметим, что в рамках реджевского подхода к дифракционным процессам, дающим вклад в σ^{dif}, относят вклад промежуточных состояний с инвариантной массой M меньшей какого-то фиксированного значения, не зависящего от начальной энергии s, $M^2 \leq M_0^2$, возникающий при разрезании амплитуды pp рассеяния между померонами (см. Рис. 2).

Однако, при переходе к сверхвысоким энергиям БАК, появляется вклад различных дифракционных процессов с большими массами $M^2 \sim s$. В рамках реджевского подхода такие процессы могут быть описаны путем добавления вершины 3-померонного взаимодействия.

Пример такого процесса представлен на Рис. 3. Квадрат инвариантной массы, образующихся частиц, в этом случае равен:

$$M^2 = (1-x)s \ , \tag{78}$$

где x - фейнмановская переменная рассеившегося начального протона. В области переменных

$$m_N^2 \ll M^2 = (1-x)s \ll s \ , \tag{79}$$

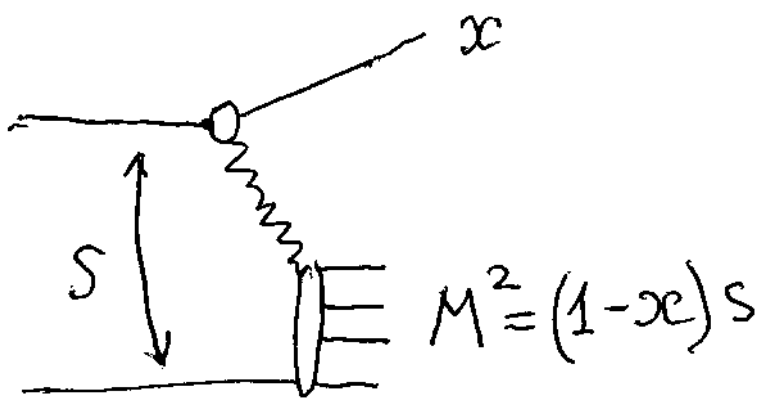

Рис. 3: Пример дифракционного процесса с большой массой $M^2 = (1-x)s$, где $x \to 1$ - фейнмановская переменная рассеившегося начального протона. В рамках реджевского подхода такие процессы могут быть описаны путем добавления вершины 3-померонного взаимодействия.

сечение этого процесса описывается рассеченой трехреджеонной диаграммой, представленной на Рис.4.

Такие процессы будут давать одно-дифракционный (Single Difraction) вклад с большими массами $m_N^2 \ll M^2 \sim s \ll s$ в полное сечение pp рассеяния, отвечающий рассечению, так называемой, “усиленной” (содержащей 3-х померонные вершины) реджеонной диаграммы (см. Рис. 5).

Аналогично при сверхвысоких энергиях возникает вклад в полное сечение и от дважды-дифракционных (Double Difraction) процессов с большими массами M_1^2 и M_2^2 пропорциональными s, но удовлетворяющими условию:

$$m_N^2 \ll M_1^2 \sim M_2^2 \ll s \tag{80}$$

(см. Рис. 6).

В последнее время в некоторых работах вводится еще понятие, так называемой, центральной дифракции (Central Difraction). Ее вклад в полное сечение дается рассечением усиленной диаграммы, изображенных на Рис. 7. В этом случае также

$$m_N^2 \ll M^2 \ll s \ , \tag{81}$$

Для нас важно понимать, что добавление в реджевскую теорию усиленных диаграмм с 3-х померонной вершиной взаимодействия приводит к изменению правил АГК. Вывод правил АГК был основан на равенстве амплитуды pp рассеяния сумме только

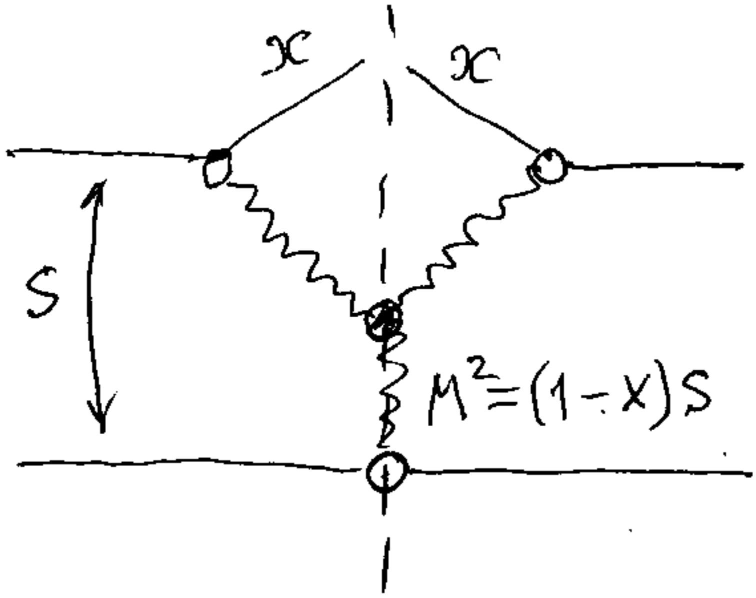

Рис. 4: Реджевская диаграмма с вершиной 3-померонного взаимодействия, описывающая дифракционный процесс с большой массой $M^2 = (1-x)s$, при рассеивании начального протона со значением фейнмановской переменной близкой к 1, $x \to 1$.

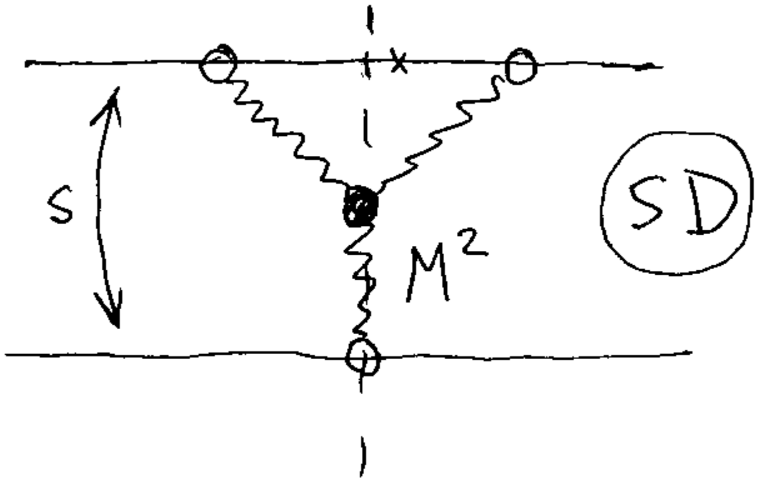

Рис. 5: Усиленая реджеонная диаграмма, описывающая вклад дифракционного процесса с большой массой $m_N^2 \ll M^2 \ll s$ в полное сечение рассеяния.

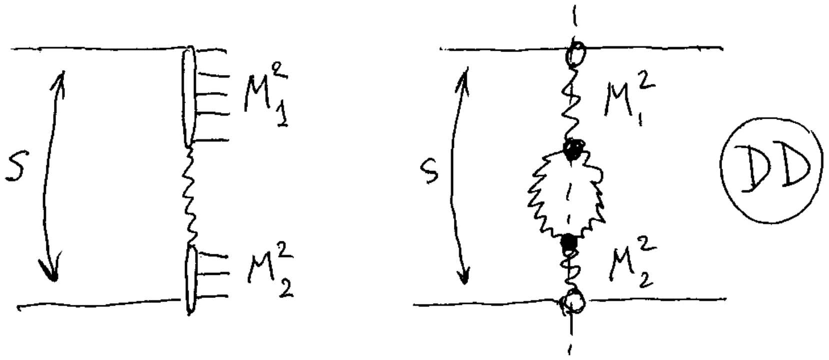

Рис. 6: Вклад в полное сечение и от дважды-дифракционных (Double Difraction) процессов с большими массами M_1^2 и M_2^2 пропорциональными s, и удовлетворяющими условию $m_N^2 \ll M_1^2 \sim M_2^2 \ll s$.

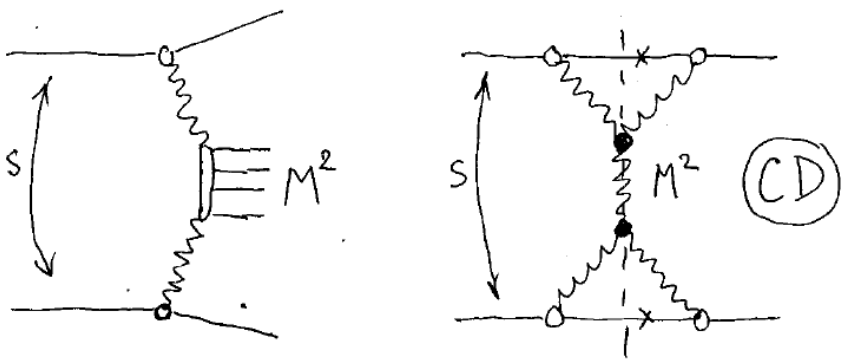

Рис. 7: Вклад в полное сечение и от процессов центральной дифракции (Central Difraction) с большой массой M^2 пропорциональной s, и удовлетворяющей условию $m_N^2 \ll M^2 \ll s$.

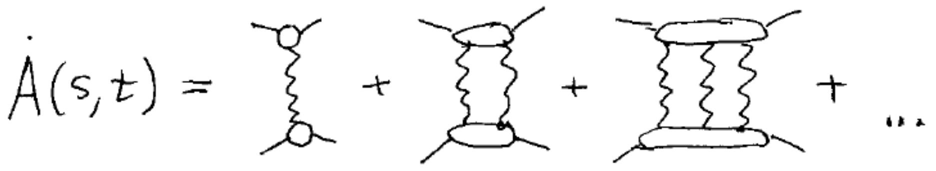

Рис. 8: Диаграммы, дающие вклад в амплитуду упругого pp-рассеяния $A(s,t)$ в стандартном реджевском подходе.

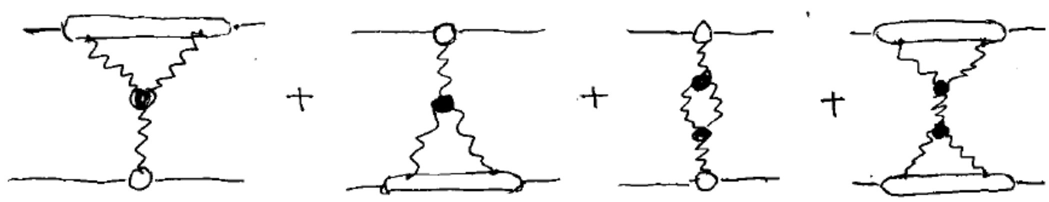

Рис. 9: Вклад в амплитуду упругого pp-рассеяния $A(s,t)$ усиленных диаграмм, содержащих 3-х померонные вершины. Их рассечение позволяет описать вклад дифракционных процессов с большими массами в полное сечение, что приводит к необходимости пересмотра правил АГК.

неусиленных диаграмм (см. Рис. 8) и вычислению скачка этой амплитуды, путем рассотрения различных вариантов рассечения этих диаграмм. При этом рассечение между померонами интерпретировалось как вклад дифракционных процессов с некоторой конечной массой не зависящей от s (см. выше Рис. 2).

Теперь в амплитуду pp рассеяния добавляются еще усиленные диаграммы (см. Рис.9), дающие вклад дифракционных процессов с большими массами. Поэтому полное сечение рассеяния также будет содержать дополнительные вклады от рассечения этих усиленных диаграмм, что требует пересмотра правил АГК, из которых, как мы видели, и вытекало ограничение $C \geq 1$.

Список литературы

[1] T. Csorgo, for the TOTEM Collaboration,
Recent Results from the CERN LHC Experiment TOTEM,
ArXiv: 1903.06992 [hep-ex] (2019)

[2] G.H. Arakelyan, A. Capella, A.B. Kaidalov, Yu.M. Shabelski, *Eur. Phys. J. C* **26** (2002), 81.

[3] Capella, A; Ferreiro, E.G.
Charged multiplicities in *pp* and *AA* collisions at LHC.
Eur. Phys. J. C. **72**, 1936 (2012)

[4] V.A. Abramovsky, N.V. Abramovskaya and N.V. Evstigneeva,
Multipomeron theory in the Gribov approach,
International Journal of Modern Physics A 31 (2016) 1645013.

[5] V.A. Ahramovsky, V.N. Gribov and O.V. Kancheli,
Yad. Fiz. 18 (1973) 595.

[6] Vechernin V.V., Belokurova S.N.
Strongly intensive variable in the model of high-energy pp interactions with the formation of string clusters
Theor. Math. Phys. 216 (2023) 1299–1312.

[7] V.N. Kovalenko, A.M. Puchkov, V.V. Vechernin, D.V. Diatchenko,
Restrictions on pp scattering amplitude imposed by first diffraction minimum data obtained by TOTEM at LHC,
IEEE Xplore, IEEE Conference Publications, 7354853;
arXiv:1506.04442 [hep-ph], 2015.