

О ВОЛНОВОЙ СТРУКТУРЕ ВБЛИЗИ ЭЛЕМЕНТАРНОГО ЗАРЯДА В ТЕОРИИ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЙ ПЛЁНКИ

Александр А. ЧЕРНИЦКИЙ

¹НОЦ Физ.-Мат. Наук и Инф. Технологий, СПХФУ

²Лаб. Теор. Физ. им. А. А. Фридмана, С-Петербург

Доклад на международной конференции «ЯДРО-2025»
Санкт-Петербург, 01 – 06 июля 2025 года.

Начнём с концепции единого поля, которая известна достаточно давно.

Согласно этой концепции весь материальный мир рассматривается как некоторое весьма сложное решение единой нелинейной полевой модели.

В концепции единого поля

- Все элементарные частицы представлены пространственно-локализованными решениями или солитонами этой модели.
- Все взаимодействия материальных объектов, в том числе, конечно, элементарных частиц-солитонов, являются следствием нелинейности модели.

Первый вопрос на этом пути – это вопрос о тензорном характере единого поля.

Нелинейное обобщение электродинамики Борна – Инфельда является примером предложения единой полевой модели, в которой в качестве фундаментального рассматривается электромагнитное поле.

Как известно, А. Эйнштейн рассматривал единые полевые модели, в которых в качестве фундаментального поля рассматривалось поле метрического тензора пространства-времени.

Пространственно-временная плёнка как единое поле

Здесь рассматривается общековариантная пространственно-временная скалярная полевая модель

Общековариантность означает инвариантность относительно произвольных преобразований координат.

Свойством общековариантности обладает также известная модель нелинейной электродинамики Борна – Инфельда.

Можно встретить упоминание о рассматриваемой модели как о скалярное модели Борна – Инфельда, хотя М. Борн и Л. Инфельд о ней не писали.

Формулировка этой модели имеет относительно простую и геометрически ясную форму.

Она есть релятивистское обобщение модели минимальной двумерной тонкой плёнки в трёхмерном пространстве.

Единое скалярное поле

Согласно указанному обобщению имеется экстремальная четырёхмерная пространственно-временная плёнка, вложенная в пятимерное плоское пространство-время.

Однако экстремальный вариационный принцип модели формулируется для действия, представляющего собой интеграл по четырёхмерному объёму.

Единственное модельное дифференциальное уравнение второго порядка определено для скалярной функции в плоском четырёхмерном пространстве-времени.

Полевая функция представляет собой пятую координату точки пространственно-временной плёнки, зависящую от координат четырёхмерного пространства-времени.

Объединение электромагнетизма и гравитации

Объединение электромагнитного и гравитационного взаимодействий ранее рассматривалось автором в рамках нелинейной электродинамики типа Борна – Инфельда.

В нелинейной электродинамике имеется два типа взаимодействия солитонов на больших расстояниях, которые можно называть силовым и метрическим. Силовое соответствует электромагнитному взаимодействию заряженных частиц-солитонов, а метрическое – гравитационному взаимодействию любых солитонов-частиц.^{1,2,3}

¹А. А. Chernitskii, Dyons and Interactions in Nonlinear (Born-Infeld) Electrodynamics, *J. High Energy Phys.* **1999**, No 12, Paper 10 (1999).

²А. А. Chernitskii, Born-Infeld equations, in *Encyclopedia of Nonlinear Science*, ed. A. Scott (Routledge, New York and London, 2005), p. 67.

³А. А. Черницкий, *Нелинейная электродинамика: сингулярные солитоны и их взаимодействия*, 360 с. Санкт-Петербург, ИНЖЭКОН, 2012; <http://chernitskii.ru/books/>.

Реалистичная полевая модель

Силовое и метрическое взаимодействия солитонов-частиц характерны для любых релятивистски инвариантных полевых моделей, в том числе и для скалярной модели.

Таким образом в скалярной полевой модели пространственно-временной плёнки также реализуется объединение электромагнетизма и гравитации.

Электромагнетизм

Уравнение пространственно-временной плёнки имеет сферически симметричное в собственной системе координат точное решение, которое сопоставляется точечной заряженной частице.

Соответствующее движущееся решение называем сфероидальным солитоном или сфероном.

Силовое взаимодействие между сферонами в теории пространственно-временной плёнки тождественно электромагнитному.⁴

⁴А. А. Chernitskii, About long-range interaction of spheroidal solitons in scalar field nonlinear model, *Journal of Physics: Conf. Series* **938** (2017) 012029.

Метрическое взаимодействие частиц-солитонов в теории пространственно-временной плёнки имеет вид гравитационного взаимодействия материальных частиц.^{5,6}

Таким образом в теории пространственно-временной плёнки естественным образом объединяются электромагнитное и гравитационное взаимодействия материальных объектов.

⁵A. A. Chernitskii, Induced gravitation in nonlinear field models, *Int. J. Mod. Phys. Conf. Ser.* **41** (2016) 1660119; arXiv:1808.10266.

⁶A. A. Chernitskii, Gravitation in unified scalar field theory, *Universe* **2021** 7 11. Оригинал статьи

Найдены солитонные решения, представляющие фотоны.^{7,8}

- Имеется пропорциональность частоты и энергии солитонов с коэффициентом в виде постоянной Планка.
- Их момент импульса или спин направлен по или против направления движения и равен постоянной Планка.
- Распределение спектральной плотности энергии идеального газа солитонов совпадает с распределением Планка для излучения абсолютно чёрного тела.

Авторский текст на русском языке

А. А. Черницкий

Экстремальный вариационный принцип для поля⁹

$$\delta \mathcal{A} = 0, \quad \mathcal{A} = \int_{\bar{V}} \sqrt{|\mathfrak{M}|} (dx)^4 = \int_{\bar{V}} \mathcal{L} d\bar{V}, \quad (1a)$$

где $\mathfrak{M} \doteq \det(\mathfrak{M}_{\mu\nu})$, $(dx)^4 \doteq dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$,

$\bar{V}$ – пространственно-временной объём,

$d\bar{V} \doteq \sqrt{|\mathfrak{m}|} (dx)^4$ – элемент четырёхмерного объёма,

$$\mathfrak{M}_{\mu\nu} = \mathfrak{m}_{\mu\nu} + \chi^2 \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\nu}, \quad \mathcal{L} \doteq \sqrt{\left| 1 + \chi^2 \mathfrak{m}^{\mu\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\nu} \right|} \quad (1b)$$

$\mathfrak{m}_{\mu\nu}$ – компоненты метрического тензора плоского четырёх-
 мерного пространства-времени с сигнатурой $\{-, +, +, +\}$,

Φ – скалярная действительная функция, χ – размерная кон-
 станта. Греческие индексы принимают значения $\{0, 1, 2, 3\}$.

⁹A. A. Chernitskii. Lightlike shell solitons of extremal space-time film.

Journal of Physics Communications, **2**, 105013 (2018).

Общая ковариантность модели

Подынтегральное выражение $\sqrt{|\mathfrak{M}|} (dx)^4 = \mathcal{L} d\bar{V}$ в интеграле действия $\mathcal{A}$ (1), а значит и само действие, инвариантно относительно произвольных преобразований координат четырёхмерного пространства-времени.

Эта инвариантность следует из соответствующего свойства детерминанта тензора второго ранга $\mathfrak{M} \doteq \det(\mathfrak{M}_{\mu\nu})$.

Этот тензор может быть назван мировым тензором.

Само действие тогда может быть названо мировым объёмом.

Таким же свойством обладает и действие модели нелинейной электродинамики Борна – Инфельда.

Пространственно-временное обобщение модели двумерной тонкой плёнки в трёхмерном пространстве

Произведение $\chi \Phi$ имеет размерность длины, то есть *метр*. Это естественно для пятой координаты точки на пространственно-временной плёнке.

Представление пятой координаты в виде произведения константы χ размерности *метр/Вольт* и полевой функции Φ размерности *Вольт* удобно для расчётов, связанных с электромагнитным взаимодействием.

Если полевая функция зависит только от двух пространственных координат $\Phi = \Phi(x^1, x^2)$, то рассматриваемая модель (1) совпадает с моделью минимальной двумерной тонкой плёнки в трёхмерном пространстве. При этом координата $\chi \Phi$ представляет собой высоту этой плёнки над плоскостью $\{x^1, x^2\}$.

Канонический тензор плотности энергии-импульса

Канонический тензор плотности энергии-импульса в Декартовых координатах имеет вид:

$$\bar{\mathcal{T}}^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\Phi^\mu \Phi^\nu}{\mathcal{L}} - \frac{\underline{m}^{\mu\nu}}{\chi^2} \mathcal{L} \right), \quad \Phi^\alpha \doteq \underline{m}^{\alpha\beta} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\beta}. \quad (2)$$

где $\underline{m}^{\mu\nu}$ – диагональная метрика с диагональными компонентами $\{-1, 1, 1, 1\}$.

Как видно, полученный канонический тензор симметричен.

Регуляризованный тензор плотности энергии-импульса

Для возможности получения конечных энергии и импульса в бесконечном пространстве вводится регуляризованный тензор плотности энергии-импульса

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = \bar{\mathcal{F}}^{\mu\nu} - \tilde{\mathcal{F}}^{\mu\nu}, \quad (3)$$

где $\tilde{\mathcal{F}}^{\mu\nu}$ – регуляризирующий тензор плотности энергии-импульса, удовлетворяющий дифференциальному закону сохранения

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0. \quad (4)$$

Часто используется постоянный регуляризирующий тензор

$$\tilde{\mathcal{F}}^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi\chi^2} \underline{\mathfrak{m}}^{\mu\nu}. \quad (5)$$

Однако в качестве регуляризирующего может использоваться и непостоянный тензор.

Уравнение пространственно-временной плёнки

В Декартовых координатах имеем уравнение модели

$$\bar{\mathcal{F}}^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = 0, \quad (7a)$$

где $\bar{\mathcal{F}}^{\mu\nu}$ – канонический тензор плотности энергии-импульса.

После умножения (7a) на $(-4\pi \chi^2 \mathcal{L})$ полевое уравнение приводится к виду, не содержащему радикалов:

$$\left(\underline{\mathbf{m}}^{\mu\nu} \left(1 + \chi^2 \underline{\mathbf{m}}_{\sigma\rho} \Phi^\sigma \Phi^\rho \right) - \chi^2 \Phi^\mu \Phi^\nu \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = 0. \quad (7b)$$

Уравнение (7) переходит в обычное волновое уравнение при $\chi = 0$:

$$\underline{\mathbf{m}}^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = 0. \quad (8)$$

Дуальный четырёхвектор

Вариационный принцип $\delta\mathcal{A} = 0$ с действием (??) даёт модельное уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{|\mathbf{m}|}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \sqrt{|\mathbf{m}|} \Upsilon^\mu = 0 \, , \tag{9a}$$

где

$$\Upsilon^\mu \doteq \frac{\Phi^\mu}{\mathcal{L}} \, , \quad \Phi^\mu = \mathbf{m}^{\mu\nu} \Phi_\nu \, , \quad \Phi_\nu \doteq \frac{\partial \Phi}{\partial x^\nu} \, , \tag{9b}$$

$$\frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x^\mu} = 0 \, . \tag{9c}$$

Здесь мы можем рассматривать систему уравнений первого порядка для компонент вектора $\{\Phi_\mu\}$.

Четырёхвектор с компонентами $\{\Upsilon^\mu\}$ будем называть дуальным вектором поля пространственно-временной плёнки.

Система первого порядка для дуального вектора

Инверсия соотношений (9b) даёт

$$\Phi^\mu = \frac{\Upsilon^\mu}{\mathcal{E}}, \quad \mathcal{E} \doteq \sqrt{|1 - \chi^2 \mathbb{T}|}, \quad (10a)$$

$$\mathbb{T} \doteq m_{\mu\nu} \Upsilon^\mu \Upsilon^\nu = m^{\mu\nu} \Upsilon_\mu \Upsilon_\nu, \quad \mathcal{E}\mathcal{E} = 1. \quad (10b)$$

Используя (9a), (9c) и (10), для случая $1 - \chi^2 \mathbb{T} > 0$ получаем систему уравнений первого порядка для контравариантных компонент дуального вектора $\{\Upsilon_\mu\}$:

$$\frac{1}{\sqrt{|m|}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \sqrt{|m|} m^{\mu\nu} \Upsilon_\nu = 0, \quad (11a)$$

$$\left(\frac{\partial \Upsilon_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Upsilon_\nu}{\partial x^\mu} \right) (1 - \chi^2 \mathbb{T}) - \chi^2 \left(\Upsilon_\mu \frac{\partial \mathbb{T}}{\partial x^\nu} - \Upsilon_\nu \frac{\partial \mathbb{T}}{\partial x^\mu} \right) = 0. \quad (11b)$$

Пространственно-временная алгебра

Пространственно-временная алгебра – это система гиперкомплексных чисел в алгебре Клиффорда^{10,11,12}. Она содержит 16 базисных элементов, которые имеют матричное представление в Декартовых координатах в виде различных произведений матриц Дирака.

Удобнее не использовать матричное представление, а все вычисления осуществлять посредством таблицы некоммутативного умножения между базисными элементами в алгебре.

Для базисных векторов в произвольных координатах используем обозначения $\{\mathbf{b}^\mu\}$.

¹⁰ А. А. Черницкий, *Нелинейная электродинамика: сингулярные солитоны и их взаимодействия*, 360 с. СПб., ИНЖЭКОН, 2012.

¹¹ Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей. М. “Наука”, 1984.

¹² А. Зоммерфельд. Строение атома и спектры. Т. II. М. ГИТТЛ, 1956.

Уравнение для дуального вектора поля ПВП

Запишем дуальный вектор поля ПВП с компонентами $\{\Upsilon^\mu\}$ в бескоординатной форме:

$$\mathbf{\Upsilon} = \Upsilon_\mu \mathbf{b}^\mu . \quad (12)$$

Система уравнений первого порядка (11) для компонент вектора $\{\Upsilon^\mu\}$ записывается в гиперкомплексной бескоординатной форме в виде одного уравнения:

$$\partial \mathbf{\Upsilon} = \chi^2 \left(\mathbb{T} \partial \wedge \mathbf{\Upsilon} + \frac{1}{2} \mathbf{\Upsilon} \wedge (\partial \mathbb{T}) \right) , \quad (13)$$

где ∂ – вектор градиента, $\wedge$ – антисимметричное произведение,

$$\partial \doteq \mathbf{b}^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} , \quad \overset{1}{\mathbf{C}} \wedge \overset{2}{\mathbf{C}} \doteq \frac{1}{2} \left(\overset{1}{\mathbf{C}} \overset{2}{\mathbf{C}} - \overset{2}{\mathbf{C}} \overset{1}{\mathbf{C}} \right) . \quad (14)$$

Дуальный кватернион поля ПВП

Для использования гиперкомплексных сферических функций, полученных в рамках исследования нелинейной электродинамики^{13,14}, удобно ввести дуальный кватернион поля ПВП по формуле:

$$\bar{\Upsilon} \doteq \mathbf{b}_0 \Upsilon = \Upsilon_0 + \mathbf{b}_0 \mathbf{b}^i \Upsilon_i = \Upsilon_0 + \mathbb{b}^i \Upsilon_i, \quad (15)$$

где $\{\mathbb{b}^i\}$ – первые три (из шести) базисных бивектора, последнее равенство справедливо для инерциальных систем координат. Здесь и далее латинские индексы принимают значения 1, 2, 3.

¹³Chernitskii A. A. Basic systems of orthogonal functions for space-time multivectors. *Advances in applied Clifford algebras*, 2005, Vol. 15, no. 1. P. 27–53.

¹⁴А. А. Черницкий, *Нелинейная электродинамика: сингулярные солитоны и их взаимодействия*, 360 с. СПб., ИНЖЭКОН, 2012.

Уравнение для дуального кватерниона поля ПВП

Из уравнения для дуального вектора поля ПВП (13) и определения (15) получаем уравнение для дуального кватерниона поля ПВП:

$$\bar{\partial}\bar{\Upsilon} = \chi^2 \left(\Upsilon \bar{\partial} \bar{\Lambda} \bar{\Upsilon} - \frac{1}{2} (\bar{\partial}\Upsilon) \bar{\Lambda} \bar{\Upsilon} \right), \quad (16)$$

где $\bar{\partial}$ – кватернион градиента, $\bar{\Lambda}$ – антисимметричное произведение с пространственной инверсией,

$$\bar{\partial} \doteq -\frac{\partial}{\partial x^0} + \mathbb{b}^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \mathbb{C} \bar{\Lambda} \mathbb{C} \doteq \frac{1}{2} \left(\mathbb{C} \mathbb{C} - \mathbb{C}^2 \mathbb{C} \right), \quad (17)$$

$\mathbb{C}$ – операция пространственной инверсии, применённая к гиперчислу, изменяет везде направления трёх пространственных базисных векторов на противоположные: $\mathbf{b}_i \rightarrow -\mathbf{b}_i$.

Статическое решение в сферических координатах для дуального вектора поля ПВП

Система уравнений первого порядка для дуального вектора поля ПВП (11) имеет точное статическое решение с одной ненулевой радиальной компонентой вектора:

$$\Upsilon_r = \frac{\bar{q}}{r^2} . \quad (18)$$

Отсюда и из определения дуального вектора (9b) следует выражение для радиальной компоненты градиента полевой функции:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\bar{q}}{\sqrt{|r^4 - \bar{r}^4|}} , \quad (19)$$

где $\bar{r} \doteq \sqrt{|\bar{q}\chi|}$.

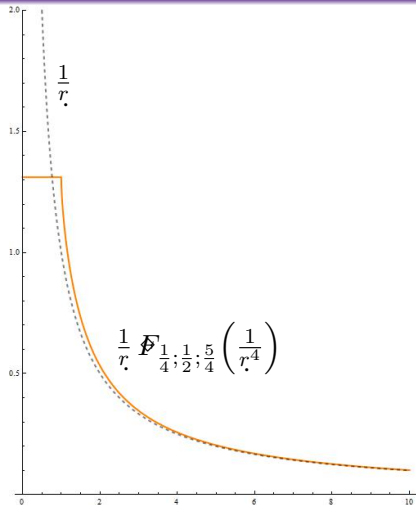
В соответствии с асимптотикой при $r \rightarrow \infty$ это решение представляет точечный заряд величины $\bar{q}$.

Покоящийся сфероидальный солитон (сферон) пространственно-временной плёнки

В четырёхмерном
 пространстве-времени уравне-
 ние пространственно-времен-
 ной плёнки имеет статическое
 сферически симметричное ре-
 шение:

$$\Phi = \frac{\bar{q}}{r} \mathcal{F}_{\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{5}{4}} \left(\frac{\bar{r}^4}{r^4} \right), \quad (20)$$

где r – сферический радиус
 в собственной системе коорди-
 нат, $r \geq \bar{r}$, $\mathcal{F}_{\alpha; \beta; \gamma}(z)$ – гипергео-
 метрическая функция,
 $\bar{r} \doteq \sqrt{|\bar{q}\chi|}$.



Энергия покоя сферона

Энергия покоя сферона конечна и выражается формулой

$$\mathbb{E} = \frac{\bar{r}^3}{\chi^2} \frac{\Gamma(3/4) + \sqrt{\pi} \Gamma(5/4)}{3 \Gamma(3/4)} \approx 0.77 \frac{\bar{r}^3}{\chi^2} = 0.77 \frac{\bar{q}^{3/2}}{\sqrt{\chi}}, \quad (21)$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция аргумента z .

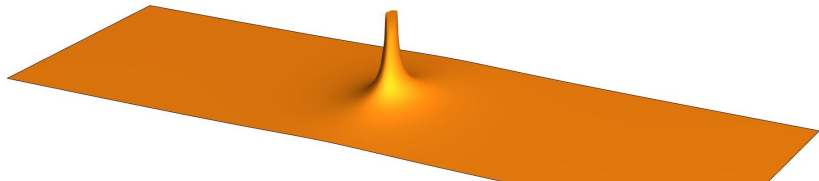
Движущийся сферон

Посредством временного поворота или преобразования Лоренца статическое решение (20) преобразуется в движущийся солитон:

$$\Phi = \begin{cases} \frac{\bar{q}}{r} \mathcal{F}_{\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{5}{4}} \left(\frac{\bar{r}^4}{r^4} \right), & r \geq \bar{r} \\ \frac{\bar{q}}{\bar{r}} \mathcal{F}_{\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{5}{4}}(1), & 0 \leq r < \bar{r} \end{cases}, \quad r = \sqrt{\frac{(x_0 - V x_1)^2}{1 - V^2} + x_2^2 + x_3^2}.$$

ВИДЕО

(22)



Дуальный кватернион поля ПВП для сферона

Дуальный кватернион поля ПВП для сферона имеет вид

$$\bar{\Upsilon} = \overset{\circ}{\Upsilon} \doteq \frac{\bar{q}}{r^2} \mathbb{b}_r , \quad (23)$$

где $\mathbb{b}_r$ – радиальный базисный бивектор собственной системы координат сферона,

$$\mathbb{b}_r \doteq (\cos \varphi \mathbb{b}_1 + \sin \varphi \mathbb{b}_2) \sin \vartheta + \mathbb{b}_3 \cos \vartheta . \quad (24)$$

Волновое уравнение в сферических координатах

Уравнение ПВП в пределе слабого поля Φ переходит в обычное скалярное волновое уравнение:

$$\Delta\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{(\partial x^0)^2} = 0. \quad (25)$$

В сферической системе координат $\{r, \vartheta, \varphi\}$ оно имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial\Phi}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \left(\sin\vartheta \frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} \right) \\ + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} - \frac{\partial^2\Phi}{(\partial x^0)^2} = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Элементарные сферические решения волнового уравнения

Элементарные решения волнового уравнения в сферических координатах $\{r, \vartheta, \varphi\}$ и их асимптотики при $r \rightarrow \infty$ имеют вид

$$\mathfrak{h}_l(kr) P_l^m(\cos \vartheta) e^{i(m\varphi - \omega x^0)} \sim \frac{(-i)^{l+1}}{kr} P_l^m(\cos \vartheta) e^{i(kr + m\varphi - \omega x^0)}, \quad (27a)$$

$$\mathfrak{h}_l(kr) P_l^m(\cos \vartheta) e^{-i(m\varphi - \omega x^0)} \sim \frac{i^{l+1}}{kr} P_l^m(\cos \vartheta) e^{-i(kr + m\varphi - \omega x^0)}, \quad (27b)$$

$$\mathfrak{h}_l \doteq \mathfrak{j}_l + i\mathfrak{y}_l, \quad \mathfrak{h}_l \doteq \mathfrak{j}_l - i\mathfrak{y}_l, \quad k^2 = \omega^2. \quad (27c)$$

где k – волновое число сферической волны,

$\mathfrak{h}_l$ и $\mathfrak{h}_l$ – сферические функции Ханкеля 1-ого и 2-ого рода,

$\mathfrak{j}_l$ и $\mathfrak{y}_l$ – сферические функции Бесселя 1-ого и 2-ого рода,

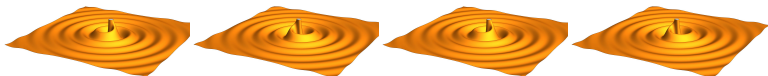
l – азимутальный индекс – целое положительное число,

m – полярный индекс – целое число, $-l \leq m \leq l$.

Спиральные сферические волны

$$\Phi = \frac{1}{2} P_l^m(\cos \vartheta) \left(\mathfrak{h}_l(kr) e^{i(m\varphi - \omega x^0)} + \mathfrak{h}_l(kr) e^{-i(m\varphi - \omega x^0)} \right), \quad (28a)$$

$$\sim \frac{1}{kr} P_l^m(\cos \vartheta) \sin(kr + m\varphi - \omega x^0 - l\pi/2). \quad (28b)$$



$$k = \omega > 0 \quad -k = \omega > 0 \quad -k = \omega < 0 \quad k = \omega < 0$$

ВИДЕО

ВИДЕО

ВИДЕО

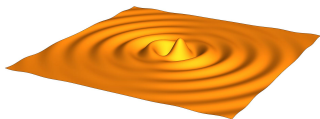
ВИДЕО

Рис. 1: Спиральные волны в плоскости $x^3 = 0$ для $m = 1$.

Кольцевые сферические волны

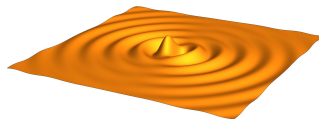
$$\Phi = \frac{1}{2} P_l^m(\cos \vartheta) \left(\mathfrak{h}_l(k r) + \mathfrak{h}_l(k r) \right) \cos(m \varphi - \omega x^0), \quad (29a)$$

$$\sim \frac{1}{k r} P_l^m(\cos \vartheta) \sin(k r - l \pi/2) \cos(m \varphi - \omega x^0). \quad (29b)$$



$$k = \omega > 0$$

ВИДЕО



$$k = \omega < 0$$

ВИДЕО

Рис. 2: Кольцевые волны в плоскости $x^3 = 0$ для $m = 1$.

Угловые гиперкомплексные сферические функции

В работе¹⁵ (см. также монографию¹⁶) были введены гиперкомплексные угловые сферические функции $\mathbb{C}_j^{lm} = \mathbb{C}_j^{lm}(\vartheta, \varphi)$, зависящие от зенитного ϑ и азимутального φ углов сферической системы координат и определяемые соотношениями

$$\mathcal{J}_3 \mathbb{C}_j^{lm} = m \mathbb{C}_j^{lm}, \quad (30a)$$

$$(\mathcal{J})^2 \mathbb{C}_j^{lm} = l(l+1) \mathbb{C}_j^{lm}, \quad (30b)$$

где $\mathcal{J}_3$ и $(\mathcal{J})^2$ – соответственно третья компонента и квадрат инфинитизимального оператора поворота, индекс j принимает четыре значения $\{s, -1, 0, 1\}$.

¹⁵Chernitskii A. A. Basic systems of orthogonal functions for space-time multivectors. *Advances in applied Clifford algebras*, 2005, Vol. 15, no. 1. P. 27–53.

¹⁶А. А. Черницкий, *Нелинейная электродинамика: сингулярные солитоны и их взаимодействия*, 360 с. СПб., ИНЖЭКОН, 2012.

Связь с обобщёнными сферическими функциями Гельфанда

Гиперкомплексные угловые сферические функции $\mathbb{C}_j^{lm}$ выражаются через обобщённые сферические функции, описанные И. М. Гельфандом с соавторами¹⁷ и подробно исследованные Н. Я. Виленкиным¹⁸. Они обозначены P_{nm}^l .

В частности, для гиперскалярной функции имеем выражение

$$\mathbb{C}_s^{lm} \doteq P_{0m}^l(\cos \vartheta) e^{\imath m \varphi} = P_l^m(\cos \vartheta) e^{\imath m \varphi}. \quad (31)$$

где $\imath$ – гипермнимая единица (единичный антисимметричный тензор четвёртого ранга или псевдоскаляр), а в функциях P_{0m}^l обычная мнимая единица заменена на гипермнимую. P_l^m – присоединённые функции Лежандра первого рода.

¹⁷Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я. Представление группы вращений и группы Лоренца. М. : ГИФМЛ, 1958.

¹⁸Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп. М. : Наука, 1991.

Кватернионные сферические волны

Рассмотрим линеаризацию уравнения (16) для дуального кватерниона поля ПВП:

$$\bar{\partial}\bar{\Upsilon} = 0 . \quad (32)$$

Его элементарные решения в сферических координатах выражаются через гиперкомплексные угловые сферические функции $\mathfrak{C}_j^{lm}$:

$$\bar{\Upsilon} = \left(\bar{\Upsilon}_s^{lm} \mathfrak{C}_s^{lm} + \bar{\Upsilon}_{-1}^{lm} \mathfrak{C}_{-1}^{lm} + \bar{\Upsilon}_0^{lm} \mathfrak{C}_0^{lm} + \bar{\Upsilon}_1^{lm} \mathfrak{C}_1^{lm} \right) e^{-\imath \omega x^0} , \quad (33)$$

где $\bar{\Upsilon}_j^{lm} = \bar{\Upsilon}_j^{lm}(r)$ – гиперскалярные функции радиальной координаты, выражающиеся через сферические функции Ханкеля, $\imath$ – гипермнимая единица.

Здесь, также как и в случае скалярных волн, можно выделить спиральные и кольцевые кватернионные сферические волны.

Расходимость энергии и растворение в волновом фоне

Радиальная асимптотика элементарных решений волнового уравнения при $r \rightarrow \infty$

$$\Phi \sim \frac{e^{ikr}}{r} \quad (34)$$

приводит к расходимости энергии на бесконечности.

Поскольку в пределе слабого поля уравнение пространственно-временной плёнки переходит в линейное волновое уравнение, такой же асимптотикой могут обладать и частицы-солитоны.

Однако, это не будет являться трудностью модели, если предположить наличие в межчастичном пространстве волнового фона. Такое предположение представляется естественным.

Энергия волнового фона конечна, но очень велика. Волновое поле солитона как бы растворяется в этом волновом фоне.

Регуляризованная энергия

Обычное вычисление энергии частицы-солитона по бесконечному пространству предполагает регуляризацию тензора плотности энергии-импульса $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ (3) посредством вычитания постоянного тензора (5).

Однако требование, предъявляемое к вычитаемому регуляризирующему тензору $\mathcal{T}^{\mu\nu}_{\infty}$, состоит только в удовлетворении для него дифференциального закона сохранения.

Рассмотрим солитон-частицу с асимптотикой на бесконечности в виде некоторой волновой моды линейного волнового уравнения. В качестве регуляризирующего тензора плотности энергии-импульса для этого солитона можно взять тензор соответствующей линейной волновой моды.

Вычисленная таким образом регуляризованная энергия будет конечной.

Об аналогичной задаче в нелинейной электродинамике Борна – Инфельда

Линеаризованная задача о рассеянии электромагнитной волны на точечном заряде в рамках нелинейной электродинамики Борна – Инфельда решалась Э. Шрёдингером. Данная попытка её решения не привела к каким-то интересным с точки зрения соответствия реальности результатам.

В монографии по нелинейной электродинамике¹⁹ (см. также приведённые там ссылки) описано решение линеаризованной задачи нахождения резонансных волновых мод сфероидального решения с привлечением численных расчётов на компьютере. При этом обнаружилось существование дискретного спектра частот волновых мод.

¹⁹ А. А. Черницкий, *Нелинейная электродинамика: сингулярные солитоны и их взаимодействия*, 360 с. Санкт-Петербург, ИНЖЭКОН, 2012.

Сумма сферона и слабой волновой моды

Рассмотрим полевую конфигурацию дуального кватерниона ПВП в виде суммы сферона $\overset{\circ}{\bar{\mathbf{Y}}}$ (23) и волновой моды $\tilde{\bar{\mathbf{Y}}}$:

$$\bar{\mathbf{Y}} = \overset{\circ}{\bar{\mathbf{Y}}} + \tilde{\bar{\mathbf{Y}}} . \quad (35)$$

Подстановка (35) в уравнение для дуального кватерниона поля ПВП (16) и линеаризация по $\tilde{\bar{\mathbf{Y}}}$ даёт линейное уравнение для нахождения слабой волновой моды:

$$\bar{\partial} \tilde{\bar{\mathbf{Y}}} = \mathcal{N}'(\overset{\circ}{\bar{\mathbf{Y}}}) \tilde{\bar{\mathbf{Y}}} , \quad (36)$$

где $\mathcal{N}'(\overset{\circ}{\bar{\mathbf{Y}}})$ обозначает слабую производную (Гато) от нелинейного оператора правой части уравнения (16) при $\bar{\mathbf{Y}} = \overset{\circ}{\bar{\mathbf{Y}}}$.

Специальная волновая мода

Рассмотрим волновую моду специального вида

$$\tilde{\mathbf{Y}} = \Re \left(\left(f_0 \left(\imath \omega \mathbb{C}_s^{lm} + \frac{\imath \sqrt{l(l+1)}}{2} (\mathbb{C}_1^{lm} + \mathbb{C}_{-1}^{lm}) \right) + f_1 \mathbb{C}_0^{lm} \right) \omega^{-l-2} e^{-\imath \omega x^0} \right), \quad (37)$$

где $f_0 = f_0(r)$ и $f_1 = f_1(r)$ – неизвестные гиперскалярные и гипердействительные функции радиальной переменной.

Волновая мода (37) представляет собой кольцевую вращающуюся волну.

При $f_0 = \mathfrak{J}_l$ (сферическая функция Бесселя первого рода) и $f_1 = f_0'$ она является кватернионным градиентом соответствующей волновой моды волнового уравнения и решением линейного кватернионного уравнения (32).

Уравнения для неизвестных функций

Подстановка специальной волновой моды (37) в линеаризованное кватернионное уравнение (36) приводит к системе уравнений для неизвестных функций радиальной переменной f_0 и f_1 :

$$\left(1 - \frac{\bar{r}^4}{r^4}\right) f_0' - \frac{2\bar{r}^4}{r^5} f_0 = f_1 \quad , \quad (38a)$$

$$f_1' + \frac{2}{r} f_1 + \left(\omega^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right) f_0 = 0 \quad . \quad (38b)$$

Подстановка f_1 и f_1' из (38a) в (38b) даёт уравнение второго порядка для f_0 :

$$\left(1 - \frac{\bar{r}^4}{r^4}\right) f_0'' + \frac{2}{r} f_0' + \left(\omega^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{6\bar{r}^4}{r^6}\right) f_0 = 0 \quad . \quad (39)$$

Преобразование уравнения

Перейдём к новой независимой переменной $\tilde{r} \doteq \omega r$ и введём новый параметр $\tilde{\tilde{r}} \doteq \omega \bar{r} = \omega \sqrt{|\bar{q}\chi|}$:

$$\left(1 - \frac{\tilde{r}^4}{\tilde{\tilde{r}}^4}\right) \tilde{f}_0'' + \frac{2}{\tilde{r}} \tilde{f}_0' + \left(1 - \frac{l(l+1)}{\tilde{r}^2} + \frac{6\tilde{r}^4}{\tilde{\tilde{r}}^6}\right) \tilde{f}_0 = 0, \quad (40)$$

где $\tilde{f}_0 = \tilde{f}_0(\tilde{r}) = f_0(r)$.

Подстановка $\tilde{r} = \tilde{\tilde{r}}$ ($r = \bar{r}$) в уравнение (40) даёт условие на сфере радиуса $\tilde{\tilde{r}}$:

$$\tilde{f}_0'(\tilde{\tilde{r}}) = \frac{1}{2} \left(\frac{l(l+1) - 6}{\tilde{\tilde{r}}} - \tilde{\tilde{r}} \right) \tilde{f}_0(\tilde{\tilde{r}}). \quad (41)$$

Сферические функции Ханкеля

При $\tilde{r} = 0$ уравнение (40) переходит в хорошо известное уравнение

$$\tilde{f}_0'' + \frac{2}{\tilde{r}} \tilde{f}_0' + \left(1 - \frac{l(l+1)}{\tilde{r}^2}\right) \tilde{f}_0 = 0, \quad (42)$$

имеющее в качестве двух линейно независимых решений пару сферических функций Бесселя ($\mathfrak{y}_l$ и $\mathfrak{y}_l$) или Ханкеля ($\mathfrak{h}_l$ и $\mathfrak{h}_l$).

Сферическая функции Ханкеля первого рода имеет вид

$$\mathfrak{h}_l(z) = \frac{e^{iz}}{i^{l+1} z} \sum_{l'=0}^l \frac{(l+l')!}{(l-l')! l'!} (-2iz)^{-l'}, \quad (43)$$

второго рода $\mathfrak{h}_l = \mathfrak{h}_l -$ комплексно сопряжённая к $\mathfrak{h}_l$.

О возможных решениях

Исследуемое уравнение (40) содержит параметр $\tilde{r}$, который определяет некоторый радиальный пространственный масштаб.

Неизвестная функция $\tilde{f}_0(\tilde{r})$ в уравнении (40) представляет собой пространственную часть радиальной волны.

Можно предположить, что наличие масштабного параметра в уравнении (40) приводит к выделенности определённых длин радиальных волн в решении.

Как следствие, может существовать дискретный спектр частот слабых волновых мод сферона.

Решение в виде асимптотического ряда

Будем искать решение уравнения (40) для функции $\tilde{f}_0(\tilde{r})$ в виде

$$\tilde{f}_0 = \tilde{P}(\tilde{r}) e^{i\tilde{r}}, \quad (44)$$

где $\tilde{P}(\tilde{r})$ – функция, представленная рядом по обратным степеням переменной $\tilde{r}$.

Подстановка (44) в (40) позволяет получить рекуррентную формулу для коэффициентов членов ряда $\tilde{P}(\tilde{r})$.

В случае $\tilde{r} = 0$ ряд обрывается на определённом члене, зависящем от параметра l и мы имеем сферическую функцию Ханкеля (43).

При $\tilde{r} \neq 0$ ряд не обрывается и требуется анализ его сходимости в зависимости от значений параметра $\tilde{r}$.

Уравнение для метода последовательных приближений

Запишем уравнение (40) в операторном виде с использованием обозначений для операторов A и B :

$$\tilde{f}_0'' + \frac{2}{\tilde{r}} \tilde{f}_0' + \left(1 - \frac{l(l+1)}{\tilde{r}^2}\right) \tilde{f}_0 = \frac{\tilde{r}^4}{\tilde{r}^4} \left(\tilde{f}_0'' - \frac{6}{\tilde{r}^2} \tilde{f}_0\right), \quad (45a)$$

$$\iff A \tilde{f}_0 = B \tilde{f}_0. \quad (45b)$$

Из последнего операторного соотношения получаем

$$\tilde{f}_0 = A^{-1} B \tilde{f}_0, \quad (46)$$

где действие оператора A^{-1} определяется решением неоднородного уравнения с левой частью уравнения для сферических функций Бесселя и Ханкеля (42).

Решение методом последовательных приближений

Операторное уравнение (46) может быть формально пригодно для решения методом сжимающих отображений:

$$\tilde{f}_0^{(n+1)} = A^{-1} B \tilde{f}_0^{(n)}, \quad (47)$$

где $\tilde{f}_0^{(n)}$ – приближение n -ого порядка, причём начальное приближение $\tilde{f}_0^{(0)}$ является решением соответствующего однородного уравнения (действием оператора $A^{-1} B$ на ноль) или линейной комбинацией сферических функций Ханкеля.

Тогда

$$\tilde{f}_0^{(1)} = A^{-1} B (C_1 \mathbf{h}_l + C_2 \mathbf{h}_l). \quad (48)$$

Постоянные C_1 и C_2 определяют амплитуду и фазу волновой моды. При этом фаза фиксируется соотношением (41) между $\tilde{f}_0$ и $\tilde{f}_0'$ при $\tilde{r} = \tilde{\tilde{r}}$. Амплитуда волновой моды остаётся произвольной, что и должно быть в линеаризованной модели.

Анализ решения методом последовательных приближений

Линейная комбинация функций Ханкеля $C_1 \mathfrak{h}_l + C_2 \mathfrak{h}_l$, как общее решение однородного уравнения, содержится в решении любого из итерационных уравнений (47).

Эту линейную комбинацию можно учитывать в приближённом решении один раз, а в качестве решений каждого итерационного уравнения брать только частное решение с нулевыми граничными условиями на сфере $\tilde{r} = \tilde{\tilde{r}}$: $\tilde{f}_0(\tilde{\tilde{r}}) = \tilde{f}'_0(\tilde{\tilde{r}}) = 0$.

Без ограничения общности можно принять асимптотику общего решения однородного уравнения в итерационных уравнениях (47) на бесконечности ($\tilde{r} \rightarrow \infty$) с определённой амплитудой:

$$C_1 \mathfrak{h}_l + C_2 \mathfrak{h}_l \sim \frac{\tilde{\tilde{r}}}{\tilde{r}} \sin(\tilde{r} + \phi_0) = \frac{\tilde{r}}{r} \sin(\tilde{r} + \phi_0) . \quad (49)$$

О волновой структуре вблизи элементарного заряда в теории пространственно-временной плёнки

Возможная асимптотика с конечной энергией

С точки зрения соответствия солитонов пространственно-временной плёнки реальным массивным элементарным частицам, в частности, лептонам, рассматриваются также тороидальные конфигурации^{20,21}.

Строилось решение исходной нелинейной модели в тороидальных координатах в виде асимптотического ряда по степеням квази-радиальной координаты. Искомое решение обладает электрическим зарядом и периодическое по времени.

В сферических координатах это решение имеет асимптотику точечной заряженной частицы на бесконечности $r \rightarrow \infty$. При этом зависимость от времени спадает как $\sim r^{-6}$

²⁰ А. А. Chernitskii, About toroidal soliton-particle of extremal space-time film, *Journal of Physics: Conf. Series* **1435** (2020) 012054.

²¹ А. А. Черницкий, О лептонах в теории пространственно-временной плёнки, *ЭЧАЯ* **54** № 4 (2023) 824-838.

О поиске пространственно-временных моделей элементарных частиц

Концепция единого поля предполагает, что все наблюдаемые элементарные частицы должны быть представлены солитонными решениями нелинейных уравнений модели.

Скалярная модель пространственно-временной плёнки представляется предпочтительной.

Наиболее подходящим для поиска этих решений является гиперкомплексное уравнение для дуального кватерниона поля.

Имеется точное статическое решение в сферических координатах, названное сфероном, соответствующее точечной заряженной частице.

Естественно, что все заряженные элементарные частицы в том или ином виде содержат это решение, возможно, только в асимптотике на бесконечности.

Спасибо за внимание

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

Подписывайтесь на мой telegram канал:

t.me/VideoPhysMath

Подписывайтесь на мой rutube канал:

rutube.ru/channel/30166511